Électromagnétisme – Chapitre 3

Magnétostatique – TD

Exercice 1 : Applications du théorème d'Ampère

On considère tout d'abord un conducteur cylindrique infini d'axe (Oz) et de rayon R parcouru par une intensité I, où on suppose que le vecteur densité volumique de courants est uniforme à l'intérieur du conducteur.

1. Déterminer l'expression du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère, puis représenter son évolution.

On considère maintenant un solénoïde infini d'axe (Oz) constitué de n spires par unité de longueur, de rayon R et parcourues par une intensité I. Comme on observe expérimentalement que le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ à l'extérieur d'un solénoïde est très faible, on suppose que celui-ci est nul dans cette modélisation.

2. Déterminer l'expression du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère, puis représenter son évolution.

Correction :

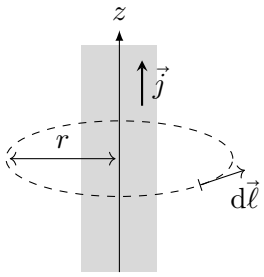
1. On applique les différentes étapes du théorème d'Ampère.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques.

Étude des symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\overrightarrow{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\overrightarrow{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$.

Étude des invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

Définition du contour d'Ampère : on choisit un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où : $\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B(r)\,\vec{e}_\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\,\mathrm{d}\ell = B(r)\oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\,2\,\pi\,r.$



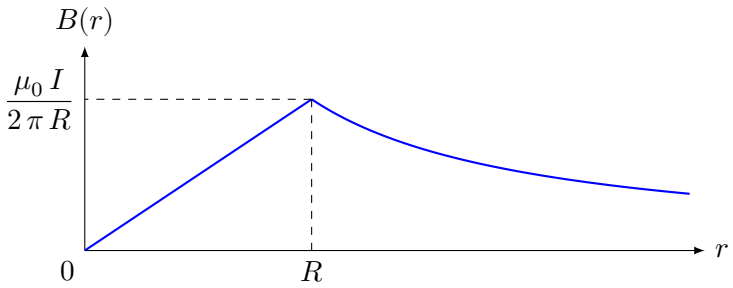
Expression de l'intensité enlacée par le contour d'Ampère : il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, le contour d'Ampère enlace toute la distribution, I_{enl} correspond alors à l'intensité dans le conducteur, soit : $I_{\text{enl}} = I$;
- si $r \leqslant R$, le contour d'Ampère enlace seulement une partie de la distribution, I_{enl} correspond alors à l'intensité passant dans ce cercle, soit : $I_{\text{enl}} = j\,\pi\,r^2$, avec $j = \dfrac{I}{\pi\,R^2}$ le vecteur densité volumique de courants à travers une section du conducteur, d'où : $I_{\text{enl}} = \dfrac{I\,r^2}{R^2}$.

Application du théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}}$, soit : $B(r)\,2\,\pi\,r = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\,I\,r^2}{R^2} & \text{pour } r \leqslant R \\ \mu_0\,I & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$,

d'où on en déduit le champ magnétostatique : $\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\,I\,r}{2\,\pi\,R^2}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

On peut représenter son évolution :



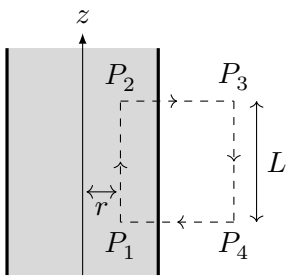
2. On applique les différentes étapes du théorème d'Ampère.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques.

Étude des symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\overrightarrow{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\overrightarrow{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$.

Étude des invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_z$.

Définition du contour d'Ampère : on choisit un rectangle $P_1P_2P_3P_4$ de longueur L partagé entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde, d'où :



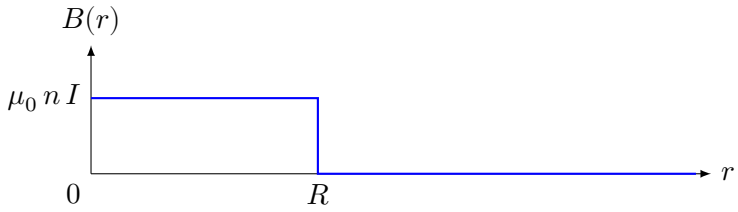
- pour la portion P_1P_2 située à une distance r de l'axe (Oz) : $\displaystyle\int_{P_1P_2} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{P_1P_2} (B(r)\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_z) = B(r)\int_{P_1P_2}\mathrm{d}\ell = B(r)\,L$;
- pour la portion P_2P_3 : $\displaystyle\int_{P_2P_3} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{P_2P_3} (B\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_r) = 0$;
- pour la portion P_3P_4 située à l'extérieur du solénoïde où le champ est nul : $\displaystyle\int_{P_3P_4} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 0$;
- pour la portion P_4P_1 : $\displaystyle\int_{P_4P_1} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{P_4P_1} (B\,\vec{e}_z)\cdot(-\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_r) = 0$;

et on obtient : $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{P_1P_2} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{P_2P_3} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{P_3P_4} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{P_4P_1} \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = B(r)\,L.$

Expression de l'intensité enlacée par le contour d'Ampère : $I_{\text{enl}} = n\,L\,I$ comme le contour d'Ampère enlace $n\,L$ spires du solénoïde.

Application du théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}}$, soit : $B(r)\,L = \mu_0\,n\,L\,I$, d'où : $B(r) = \mu_0\,n\,I$ à l'intérieur du solénoïde, et on en déduit le champ magnétostatique : $\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \mu_0\,n\,I\,\vec{e}_z & \text{pour } r < R \\ \vec{0} & \text{pour } r > R \end{cases}$.

On peut représenter son évolution :



Exercice 2 : Interactions entre fils parallèles

On considère tout d'abord un fil rectiligne, confondu avec l'axe (Oz), de longueur L que l'on peut supposer quasi-infinie, et parcouru par une intensité I dans le sens des z croissants.

1. Déterminer l'expression du champ magnétostatique créé par ce fil en tout point de l'espace.

On considère maintenant trois fils rectilignes, contenus dans le plan (xOz) et parallèles à l'axe (Oz), de même longueur L que l'on peut supposer quasi-infinie. Ils sont parcourus par des intensités dans le sens des z

croissants :

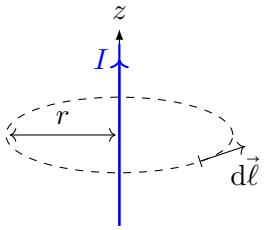
- le premier fil, parcouru par une intensité I_1, est maintenu à l'abscisse x_1 ;
- le second fil, parcouru par une intensité I_2, est libre de se déplacer entre les deux autres fils ;
- le troisième fil, parcouru par une intensité I_3, est maintenu à l'abscisse x_3.

2. Déterminer l'abscisse $x_{2,\text{éq}}$ du second fil où celui-ci est à l'équilibre.

Correction :

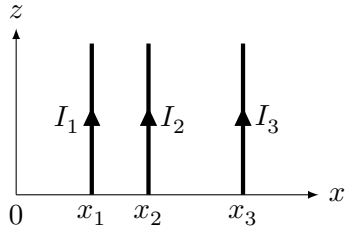
1. On considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques pour appliquer le théorème d'Ampère.
On étudie les symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$.
On étudie les invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

On choisit pour contour d'Ampère un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où : $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B(r)\,\vec{e}_\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\,\mathrm{d}\ell = B(r)\oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\,2\,\pi\,r.$



L'intensité enlacée par le contour d'Ampère est : $I_{\text{enl}} = I$.
L'application du théorème d'Ampère donne : $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}}$, soit : $B(r)\,2\,\pi\,r = \mu_0\,I$, d'où on en déduit le champ magnétostatique : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\vec{e}_\theta$.

2. On schématise la situation :



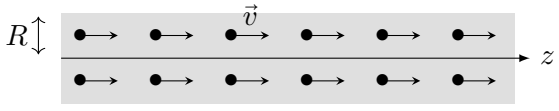
Le second fil est soumis à la force de Laplace : $\vec{F}_{\text{L}}(x_2) = I_2\,L\,\vec{e}_z \wedge \vec{B}(x_2)$, et il est à l'équilibre pour une abscisse $x_{2,\text{éq}}$ telle que : $\vec{F}_{\text{L}}(x_{2,\text{éq}}) = \vec{0}$, soit : $I_2\,L\,\vec{e}_z \wedge \vec{B}(x_{2,\text{éq}}) = \vec{0}$.
À cette abscisse $x_{2,\text{éq}}$, on peut exprimer :

- le champ magnétostatique créé par le premier fil : $\vec{B}_1(x_{2,\text{éq}}) = \dfrac{\mu_0\,I_1}{2\,\pi\,(x_{2,\text{éq}} - x_1)}\,\vec{e}_y$;
- le champ magnétostatique créé par le troisième fil : $\vec{B}_3(x_{2,\text{éq}}) = -\dfrac{\mu_0\,I_3}{2\,\pi\,(x_3 - x_{2,\text{éq}})}\,\vec{e}_y$;

et on en déduit alors le champ magnétostatique résultant à l'aide du principe de superposition : $\vec{B}(x_{2,\text{éq}}) = \vec{B}_1(x_{2,\text{éq}}) + \vec{B}_3(x_{2,\text{éq}}) = \dfrac{\mu_0}{2\,\pi}\left(\dfrac{I_1}{x_{2,\text{éq}} - x_1} - \dfrac{I_3}{x_3 - x_{2,\text{éq}}}\right)\vec{e}_y$.
La force de Laplace s'annule lorsque le champ magnétostatique résultant s'annule, et la position d'équilibre vérifie donc : $\dfrac{I_1}{x_{2,\text{éq}} - x_1} - \dfrac{I_3}{x_3 - x_{2,\text{éq}}} = 0$, d'où : $x_{2,\text{éq}} = \dfrac{I_1\,x_3 + I_3\,x_1}{I_1 + I_3}$.

Exercice 3 : Champ électromagnétique produit par un faisceau de particules

On considère un faisceau cylindrique infini de particules chargées, de rayon R et d'axe (Oz), représenté ci-dessous.



Les particules portent une charge q et se déplacent toutes à la même vitesse $\vec{v} = v\,\vec{e}_z$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen. On note n la densité volumique de particules, et on suppose que le champ électromagnétique produit par le faisceau est stationnaire.

1. Exprimer la densité volumique de charge ρ dans le faisceau.

2. Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point de l'espace.

3. Exprimer le vecteur densité volumique de courants $\vec{j}$ dans le faisceau.

4. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace.

5. Montrer que les champs vérifient en tout point de l'espace la relation :

$$\overrightarrow{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{v} \wedge \overrightarrow{E}.$$

On souhaite maintenant étudier les champs dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié aux particules.

6. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ?

7. Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E}'(M)$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}'(M)$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$, puis les comparer aux champs précédents.

Correction :

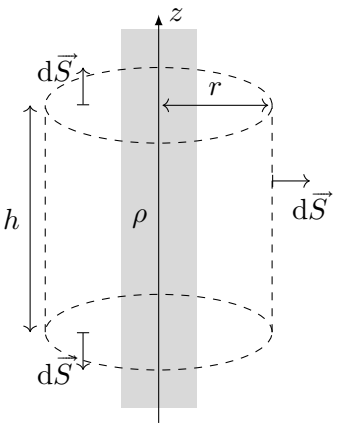
1. La densité volumique de charge dans le faisceau est : $\rho = n\,q$.

2. On considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques.

On étudie les symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\overrightarrow{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\overrightarrow{E}(M) = E(r,\theta,z)\,\vec{e}_r$.

On étudie les invariances : la distribution de charges est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe (Oz) de rayon r et de hauteur h quelconque, d'où :



- pour les surfaces latérales : $\displaystyle\iint_{S_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} (E\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = E(r)\iint_{S_{\text{lat}}} \mathrm{d}S = E(r)\,2\,\pi\,r\,h$;
- pour les surfaces supérieures : $\displaystyle\iint_{S_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} (E\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = 0$;
- pour les surfaces inférieures : $\displaystyle\iint_{S_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{inf}}} (E\,\vec{e}_r)\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = 0$;

et on obtient finalement : $\displaystyle\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = E(r)\,2\,\pi\,r\,h.$

Pour exprimer la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \pi\,R^2\,h\,\rho = \pi\,R^2\,h\,n\,q$;
- si $r \leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe une partie de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \pi\,r^2\,h\,\rho = \pi\,r^2\,h\,n\,q$.

L'application du théorème de Gauss donne : $\displaystyle\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit :

$$E(r)\,2\,\pi\,r\,h = \begin{cases} \dfrac{\pi\,r^2\,h\,n\,q}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\pi\,R^2\,h\,n\,q}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases},$$

d'où on en déduit le champ électrostatique :

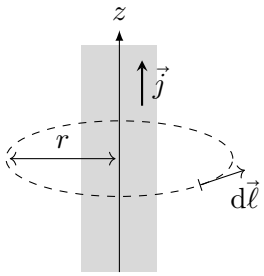
$$\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{n\,q\,r}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{n\,q\,R^2}{2\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}.$$

3. Le vecteur densité volumique de courants dans le faisceau est : $\vec{j} = n\,q\,\vec{v}$.

4. On étudie les symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\overrightarrow{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\overrightarrow{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$.

On étudie les invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

On choisit pour contour d'Ampère un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où : $\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B(r)\,\vec{e}_\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\,\mathrm{d}\ell = B(r)\oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\,2\,\pi\,r.$



Pour exprimer l'intensité enlacée par le contour d'Ampère, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, le contour d'Ampère enlace toute la distribution, soit : $I_{\text{enl}} = j\,\pi\,R^2 = n\,q\,v\,\pi\,R^2$;
- si $r \leqslant R$, le contour d'Ampère enlace une partie de la distribution, soit : $I_{\text{enl}} = j\,\pi\,r^2 = n\,q\,v\,\pi\,r^2$.

L'application du théorème d'Ampère donne : $\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}}$, soit : $B(r)\,2\,\pi\,r = \begin{cases} \mu_0\,n\,q\,v\,\pi\,r^2 & \text{pour } r \leqslant R \\ \mu_0\,n\,q\,v\,\pi\,R^2 & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$, et on en déduit le champ magnétostatique : $\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\,n\,q\,v\,r}{2}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\mu_0\,n\,q\,v\,R^2}{2\,r}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

5. Pour $r \leqslant R$, on a : $\vec{v}\wedge\overrightarrow{E} = \dfrac{v\,n\,q\,r}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_\theta = \dfrac{\overrightarrow{B}}{\mu_0\,\varepsilon_0}$.

Pour $r \geqslant R$, on a : $\vec{v}\wedge\overrightarrow{E} = \dfrac{v\,n\,q\,R^2}{2\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{e}_\theta = \dfrac{\overrightarrow{B}}{\mu_0\,\varepsilon_0}$.

Les champs vérifient donc bien en tout point de l'espace la relation : $\overrightarrow{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{v}\wedge\overrightarrow{E}$.

6. Comme les particules sont en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, le référentiel $\mathcal{R}'$ est également un référentiel galiléen.

7. La distribution de charges dans $\mathcal{R}'$ est identique à celle dans $\mathcal{R}$, le calcul du champ électrique aboutit alors à la même expression : $\overrightarrow{E}'(M) = \overrightarrow{E}(M)$.

Comme les charges sont immobiles dans $\mathcal{R}'$, le vecteur densité volumique de courants est : $\vec{j}' = \vec{0}$, d'où le champ magnétique : $\overrightarrow{B}'(M) = \vec{0}$.

Les champs électriques et magnétiques dépendent donc du référentiel d'étude. C'est cette observation qui a conduit au développement de la théorie de la relativité restreinte.

Exercice 4 : Courant non uniforme dans un câble

On considère un câble cylindrique infini d'axe (Oz) et de rayon R parcouru par un vecteur densité volumique de courants non uniforme qui s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_z = j_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z.$$

1. Déterminer l'intensité I qui parcourt le câble.

2. Déterminer la direction et les variables dont dépend le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$.

3. Déterminer l'expression du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace.

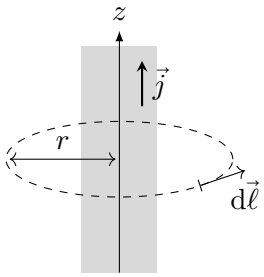
4. Déterminer la position où le champ est maximal, puis exprimer sa valeur $B_{\max}$.

Correction :

1. On obtient l'intensité en intégrant la densité volumique de courants sur une section : $I = \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} j_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = j_0\int_{r=0}^{R}\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta = j_0\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4\,R^2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$, soit : $I = \dfrac{\pi\, j_0\, R^2}{2}$.

2. On étudie les symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta$.
On étudie les invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

3. On choisit pour contour d'Ampère un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où : $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B\,\vec{e}_\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\,\mathrm{d}\ell = B(r)\oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\,2\,\pi\,r.$



Pour exprimer l'intensité enlacée par le contour d'Ampère, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, le contour d'Ampère enlace toute la distribution, soit : $I_{\text{enl}} = I = \dfrac{\pi\, j_0\, R^2}{2}$;
- si $r \leqslant R$, le contour d'Ampère enlace seulement une partie de la distribution, soit : $I_{\text{enl}} = \int_{r=0}^{r}\int_{\theta=0}^{2\pi} j_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = j_0\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4\,R^2}\right]_0^r [\theta]_0^{2\pi} = \pi\, j_0\, r^2\left(1-\frac{r^2}{2\,R^2}\right)$.

L'application du théorème d'Ampère donne : $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\text{enl}}$, soit : $B(r)\,2\,\pi\,r = \begin{cases} \mu_0\,\pi\, j_0\, r^2\left(1-\dfrac{r^2}{2\,R^2}\right) & \text{pour } r \leqslant R \\ \mu_0\,\dfrac{\pi\, j_0\, R^2}{2} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$, et on en déduit le champ magnétostatique : $\vec{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\, j_0\, r}{2}\left(1-\dfrac{r^2}{2\,R^2}\right)\vec{e}_\theta & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\mu_0\, j_0\, R^2}{4\,r}\,\vec{e}_\theta & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

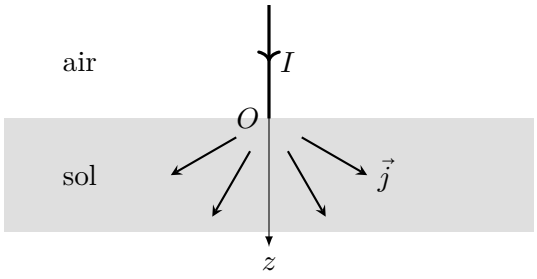
4. À l'intérieur du câble, le champ est maximal à une position $r = r_{\text{int}}$ telle que : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\dfrac{\mu_0\, j_0\, r}{2}\left(1-\dfrac{r^2}{2\,R^2}\right)\right] = 0$, soit : $1-\dfrac{3\,r_{\text{int}}^2}{2\,R^2} = 0$, d'où : $r_{\text{int}} = \dfrac{\sqrt{2}\,R}{\sqrt{3}}$, et il vaut alors : $B_{\text{max,int}} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mu_0\, j_0\, R}{3\,\sqrt{3}}$.
À l'extérieur du câble, le champ décroit avec la coordonnée radiale, il est alors maximal à la position $r_{\text{ext}} = R$, où il vaut : $B_{\text{max,ext}} = \dfrac{\mu_0\, j_0\, R}{4}$.
Comme $B_{\text{max,int}} > B_{\text{max,ext}}$, le champ est donc maximal en $r = \dfrac{\sqrt{2}\,R}{\sqrt{3}}$, où il vaut : $B_{\text{max}} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mu_0\, j_0\, R}{3\,\sqrt{3}}$.

Exercice 5 : Champ magnétique créé par la foudre

On souhaite déterminer le champ magnétique créé par un courant de foudre d'intensité I en régime permanent. On modélise la foudre :

- dans l'air, qui occupe le demi-espace $z < 0$, par un courant I sur l'axe (Oz) dans le sens des z croissants ;
- dans le sol, qui occupe le demi-espace $z > 0$, par un vecteur densité volumique de courant qui s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\vec{j} = \frac{I}{2\,\pi\, r^2}\,\vec{e}_r.$$



1. Justifier que l'expression du vecteur densité volumique de courant est compatible avec la loi des nœuds.

2. Montrer que le champ magnétostatique en tout point de l'espace peut s'exprimer sous la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r,\theta)\,\vec{e}_\varphi$ en coordonnées sphériques.

3. En déduire la forme des lignes de champ.

4. Déterminer l'expression du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}_\text{a}(M)$ dans l'air.

On admet que la norme du champ magnétostatique dans le sol s'exprime sous la forme :

$$B_\text{s}(M) = \frac{k\,I\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}$$

avec k une constante.

5. Sachant que le champ magnétostatique est continu à l'interface $z = 0$, déterminer l'expression de la constante k.

Correction :

1. Le courant traversant une hémisphère de rayon r dans le sol est : $\iint_\text{hémisphère} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_\text{hémisphère} \frac{I}{2\,\pi\,r^2}\,\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e}_r = \frac{I}{2\,\pi\,r^2}\iint_\text{hémisphère}\mathrm{d}S = \frac{I}{2\,\pi\,r^2}\,2\,\pi\,r^2 = I$, on retrouve le courant apporté par la foudre, ce qui est compatible avec la loi de nœuds au point O.

2. On étudie les symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\overrightarrow{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\overrightarrow{B}(M) = B(M)\,\vec{e}_\varphi$.
On étudie les invariances : la distribution de courants est invariante par rotation selon φ, d'où : $\overrightarrow{B}(M) = B(r,\theta)\,\vec{e}_\varphi$.

3. On en déduit que les lignes de champ sont des cercles d'axe (Oz).

4. On choisit pour contour d'Ampère un cercle d'axe (Oz), de rayon $R = r\sin\theta$, de cote $z < 0$ et orienté selon $\vec{e}_\varphi$, d'où : $\oint_C \overrightarrow{B}_\text{a}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C \left(B_\text{a}\,\vec{e}_\varphi\right)\cdot\left(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\varphi\right) = \oint_C B_\text{a}\,\mathrm{d}\ell = B_\text{a}\oint_C \mathrm{d}\ell = B_\text{a}\,2\,\pi\,R = B_\text{a}\,2\,\pi\,r\sin\theta$.
L'intensité enlacée par le contour d'Ampère est : $I_\text{enl} = I$.
L'application du théorème d'Ampère donne : $\oint_C \overrightarrow{B}_\text{a}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_\text{enl}$, soit : $B_\text{a}\,2\,\pi\,r\sin\theta = \mu_0\,I$, d'où on en déduit le champ magnétostatique dans l'air : $\overrightarrow{B}_\text{a}(M) = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r\sin\theta}\,\vec{e}_\varphi$.

5. Comme le champ magnétostatique est continu à l'interface $z = 0$, on obtient : $B_\text{a}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = B_\text{s}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, soit : $\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r} = \frac{k\,I}{r}$, d'où : $k = \frac{\mu_0}{2\,\pi}$.